

ES. 6

1

Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \ln(x)) \cdot \ln^n x \quad \text{e calcolarne la somma}$$

Dim:

Iniziamo a studiare la convergenza puntuale, cioè la convergenza della serie per ogni fissata $x \in \mathbb{R}$.

$(1 - \ln(x)) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x)^n$ converge sso se l'argomento della serie geometrica che appare, $\ln x$, ha modulo minore di 1, cioè $|\ln x| < 1$, cioè se $-1 < \ln x < 1$, ovvero $e^{-1} < x < e$.

Quindi c'è convergenza puntuale per $e^{-1} < x < e$.

In tal caso, dalla formula della somma della serie geometrica $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \right)$, si ha: $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n x = \frac{1}{1-\ln x}$, quando

$e^{-1} < x < e$, $x \neq 1$. Nel caso $x=1$, $\ln(1)=0$, quindi

$\ln^n(1) = 0 \quad \boxed{\forall n \geq 1}$. Ma per $n=0$, $\boxed{0^0 = 1}$ (in questo caso

vale questa relazione nel senso che segue: lo si può mostrare ad esempio

studiando il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^0 = 1$).

$$\text{Per cui } \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(1) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0^n = 1 \right|.$$

per cui per ogni $e^{-1} < x < e$, $x \neq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}$,

mentre $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(1) = 1$. Tornando alla serie di potenza, $(1 - \ln(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(x)$, si ha:

$$e^{-1} < x < e, x \neq 1 \quad (1 - \ln(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(x) = \frac{1 - \ln(x)}{1 - \ln(x)} = 1 ;$$

$$x = 1, \quad \underbrace{(1 - \ln(1))}_{=1} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(1)}_{=1} = 1 ;$$

Inoltre per $x = e$, si ha $(1 - \ln(e)) = 0$, per cui $(1 - \ln(e)) \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(e) = 0$.

Per tutti gli altri valori di x la serie non converge. Riassumendo, chiamando $S_m(x) = \sum_{k=1}^m (1 - \ln(x)) \ln^k(x)$, si ha

$$S_m(x) \rightarrow S(x) = \begin{cases} 1 & e^{-1} < x < e \\ 0 & x = e \end{cases}$$

Limite puntuale della successione S_m definita dalla somma parziale di una serie, diverge altrove.

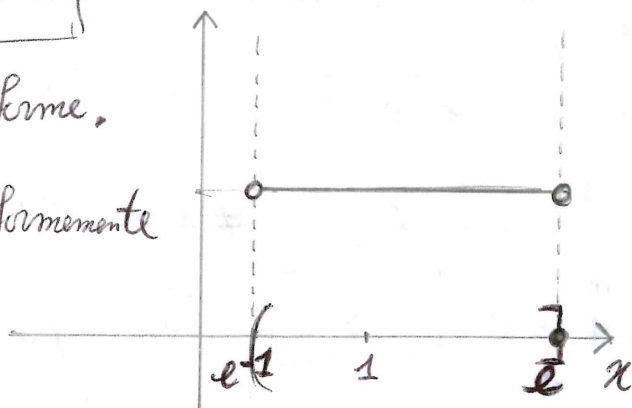
Passiamo ora alla convergenza uniforme.

Chiaramente S_m non converge uniformemente

ad S su $(e^{-1}, e]$, altrimenti

la funzione limite sarebbe continua

su $(e^{-1}, e]$, ma la funzione non è continua in $x = e$.



Ci chiediamo se converge uniformemente in qualche sottoinsieme di $(e^{-1}, e]$.

Abbiamo già capito che "vicino ad e" non c'è convergenza uniforme. Vediamo vicino a e^{-1} . Studiamo innanzitutto la convergenza totale delle serie.

$(1 - \ln(e^{-1})) = 2$; Siamo su $(e^{-1}, e]$, con $e < e$.

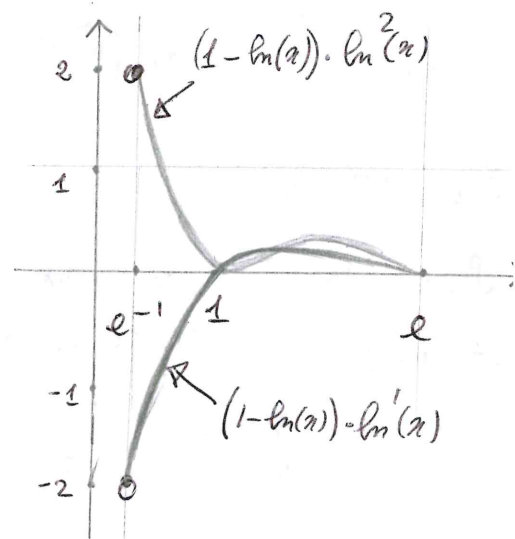
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in (e^{-1}, e]} |(1 - \ln(x)) \cdot \ln^n(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in (e^{-1}, e]} (1 - \ln(x)) \cdot |\ln^n(x)| ;$$

ora la funzione $(1 - \ln(x)) \cdot |\ln^n(x)|$ su $(e^{-1}, e]$ è l.c.

$\lim_{x \rightarrow e^{-1}} (1 - \ln(x)) \cdot |\ln^n(x)| = 2 \quad \forall n \geq 1$. Quindi sicuramente

$\sup_{x \in (e^{-1}, e]} |(1 - \ln(x)) \cdot \ln^n(x)| \geq 2$ (il sup sarà almeno 2)

La situazione è simile a quella in disegno. È importante capire che il sup sull'intervallo aperto (e^{-1}, e) è almeno 2, cioè il limite



della funzione per $x \rightarrow e^{-1}$. (può anche essere più grande, ma a noi basta questa informazione!).

Quindi non c'è convergenza totale vicino a " e^{-1} ".

Ritorniamo che la convergenza totale delle serie implica quella uniforme delle successioni delle ridotte S_n ad S . Ma può esserci convergenza uniforme anche senza quella totale! (Non, è un se e no se).

~~Non si può dire che la serie converge uniformemente su $(e^-, e]$~~

Bisogna comunque esserci e. uniforme!

ricapitoliamo quanto abbiamo fatto finora:

lo vediamo dopo!

$S_n(x) \rightarrow S(x) = \begin{cases} 1 & e^- < x < e \\ 0 & x = e \end{cases}$, quindi su $(e^-, e]$,
puntualmente.

Non c'è convergenza uniforme su $[c, e]$, per qualche $c > e^-$.

Non c'è convergenza ^{totale} su $(e^-, c]$, per qualche $c < e$;
forse uniforme si?

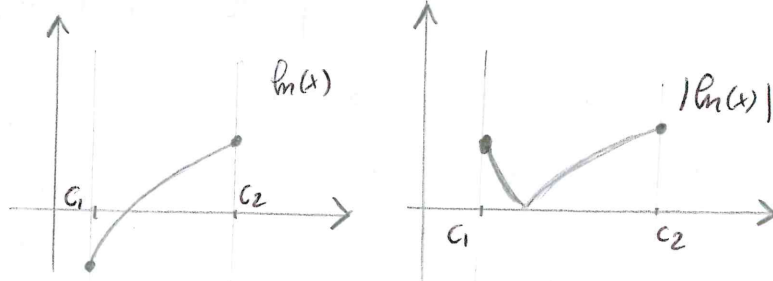
Dovrebbe esserci quindi in un qualche $[c_1, c_2] \subset (e^-, e]$,
con $e^- < c_1 < c_2 < e$.

Ora, $|(1 - \ln(x))P_n(x)| \leq \underbrace{|(1 - \ln(x))|}_{\leq 2} \cdot |P_n(x)|^m \leq 2 \cdot |P_n(x)|^m$.
 $\forall x \in [c_1, c_2]$ (in realtà $\forall x \in (e^-, e]$)

Per notiamo:

$\sup_{x \in [c_1, c_2]} |P_n(x)| = \max_{x \in [c_1, c_2]} |P_n(x)| = \max \{ |P_n(c_1)|, |P_n(c_2)| \}$:
giacché su un compatto

il massimo di $|P_n(x)|$ tra c_1 e c_2 è il massimo tra i valori
che assume $|P_n(x)|$ al bordo, poiché $P_n(x)$ è crescente! (farsi
un disegno per capire:



Quindi $\sup_{x \in [c_1, c_2]} |(1 - \ln(x)) \cdot \ln^n(x)| \leq 2 \cdot \left(\max \{ |\ln(c_1)|, |\ln(c_2)| \} \right)^n$ 3

Supponiamo (senza perdita di generalità, è uguale) che $|\ln(c_1)| \geq |\ln(c_2)|$.

Quindi $\sup_{x \in [c_1, c_2]} |(1 - \ln(x)) \cdot \ln^n(x)| \leq 2 \cdot |\ln(c_1)|^n$, e quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in [c_1, c_2]} |(1 - \ln(x)) \cdot \ln^n(x)| \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} |\ln(c_1)|^n < +\infty,$$

come $e^{-1} < c_1 < e$. Quindi la serie converge totalmente.

Quindi c'è convergenza uniforme su ogni $[c_1, c_2] \subset (e^{-1}, e]$.

Ci potrebbe essere convergenza uniforme su $(e^{-1}, e]$, con $e < e$?

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^m (1 - \ln(x)) \ln^k(x)$$

$$S(x) = 1 \quad (\text{siamo su } (e^{-1}, e] \text{ con } e < e);$$

$$S(x) - S_m(x) = 1 - (1 - \ln(x)) \sum_{k=0}^m \ln^k(x); \quad \text{calcoliamo } \lim_{x \rightarrow e^-} S(x) - S_m(x) =$$

$$= \begin{cases} 1 - (2 \cdot 0), & m \text{ pari} \\ 1 - (2 \cdot 1), & m \text{ dispari} \end{cases} = \begin{cases} 1, & m \text{ pari} \\ -1, & m \text{ dispari} \end{cases}; \quad \text{per cui } \lim_{x \rightarrow e^-} |S(x) - S_m(x)| = 1 \quad \forall m;$$

$$\sup_{x \in (e^{-1}, e]} |S(x) - S_m(x)| \geq \lim_{x \rightarrow e^-} |S(x) - S_m(x)| = 1 \quad \forall m, \text{ per cui}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in (e^{-1}, e]} |S(x) - S_n(x)| \geq 1, \text{ quindi non c'è conv. uniforme}$$

$$S_m \rightarrow S \text{ in } (e^{-1}, e].$$



Es. 7 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx^2 - n^2 x}$$

Dim:

• $x=0$, si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ che non converge;

$x < 0$, si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{nx^2 - n^2 x} = +\infty$, quindi la serie non converge;

notiamo che $e^{nx^2 - n^2 x} = e^{-n^2(x - \frac{x^2}{n})}$; al esempio, se

la confrontiamo con la serie di termine n -esimo e^{-n} ,

si ha che $\frac{e^{-n^2(x - \frac{x^2}{n})}}{e^{-n}} = e^{-n^2(x - \frac{x^2}{n} - \frac{1}{n})} \rightarrow 0$ per $n > 0$,
 $n \rightarrow +\infty$

e la serie di termine n -esimo e^{-n} , $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$, è convergente.

Quindi dal Criterio del confronto asintotico, la serie

$f_n(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} e^{nx^2 - n^2 x}$ converge ad una certa $S(x)$

per ogni $x > 0$ (quindi si ha convergenza

puntuale su $(0, +\infty)$). Non cerchiamo una formula

esplicita di $S(x)$ in questo caso: sappiamo che $\forall x > 0$

$S(x)$ ha un valore ben definito!.

Studiamo ora la convergenza uniforme su $(0, +\infty)$. 4

Piccino $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{mx^2 - m^2x} = +\infty \quad \forall m$ (notiamo che ora

che studiamo il $\left[\sup_{x \in (0, +\infty)} |e^{mx^2 - m^2x}|, \forall m \right]$, m è fisso e $x \rightarrow +\infty$,
"i ruoli di m ed x si invertono rispetto allo studio di $e^{mx^2 - m^2x}$ per $m \rightarrow +\infty$ fatto in precedenza"), si ha $\sup_{x \in (0, +\infty)} |e^{mx^2 - m^2x}| = +\infty \quad \forall m$,

Quindi la serie non converge totalmente su $(0, +\infty)$.

La "patologia" in questo caso è $+\infty$.

Consideriamo allora $(0, M]$; piccino $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{mx^2 - m^2x} = 1$,

chiaramente $\sup_{x \in (0, M]} |e^{mx^2 - m^2x}| \geq 1 \quad \forall m$, quindi la

serie non converge totalmente neppure su $(0, M]$; per

la "patologia" è in 1: $\left[\sum_{m=0}^{+\infty} \sup_{x \in (0, M]} |e^{mx^2 - m^2x}| \geq \sum_{m=0}^{+\infty} 1 = +\infty \quad \forall M; \right]$

Potremmo studiare la convergenza totale in $[m, M]$,
 $m > 0$, $M < +\infty$, $m < M$, $m, M \in \mathbb{R}$ arbitrari.

Consideriamo $f_m = e^{mx^2 - m^2x}$ su $[m, M]$; calcoliamo la
derivata: $f'_m(x) = (2mx - m^2) e^{mx^2 - m^2x}$; essa è uguale a 0

se $2mx = m^2$, cioè $x = \frac{m}{2}$;

in questo caso $f_m\left(\frac{m}{2}\right) = e^{-\frac{m^3}{4}}$;

~~Il massimo di f_m su $[m, M]$ (che non sappiamo quale sia effettivamente) può essere $e^{-\frac{m^3}{4}}$ (il cui punto critico, l'unico)~~

Piace come $M > 0$ è fissato, per ogni scelta di punto volere esistente $\bar{m} : \frac{\bar{m}}{2} > M$, quindi per tutti gli $m \geq \bar{m}$,

la funzione f_m non ha punti critici nell'interno di $[m, M]$, (*) quindi il punto di massimo può essere $f_m(m)$ o $f_m(M)$, cioè $e^{mm^2 - m^2m}$ o $e^{mM^2 - m^2M}$, cioè

$$\sup_{x \in [m, M]} f_m(x) = \max \{f_m(m), f_m(M)\} \quad \forall m \geq \bar{m};$$

Studiando la convergenza

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sup_{x \in [m, M]} |f_m(x)| = \sum_{m=0}^{+\infty} \sup_{x \in [m, M]} f_m(x) = \sum_{m=0}^{\bar{m}-1} \sup_{x \in [m, M]} f_m(x) + \sum_{m=\bar{m}}^{+\infty} \sup_{x \in [m, M]} f_m(x) =$$

f_m positive

$$C + \sum_{m=\bar{m}}^{\infty} \max \left\{ e^{mm^2 - m^2m}, e^{mM^2 - m^2M} \right\}$$

↑
è la somma dei primi $\bar{m}$ termini, che è finita certamente!

(*) Spiegato meglio: per $m \geq \bar{m}$, $f'_m(x) \neq 0$ su tutto $[m, M]$, quindi sarà o crescente o decrescente su $[m, M]$. Quindi il max sarà o $f_m(M)$ o $f_m(m)$. Ora cercheremo di capirlo.

ci resta da capire qual è il $\max \left\{ e^{mM^2 - m^2M}, e^{mM^2 - m^2M} \right\} \quad | \quad 5$

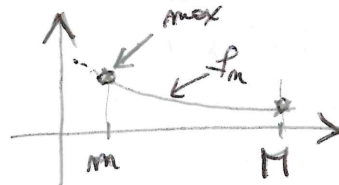
dimmo che un certo m in poi. E' appunto torniamo

alla funzione f_m ; $f'_m = 0$ per $x = \frac{M}{2}$; per $x < \frac{M}{2}$ è
decrecente, per $x > \frac{M}{2}$ è crescente; siccome siamo nella "coda"

$$\sum_{m=\bar{m}}^{+\infty} f_m \quad \text{e} \quad \frac{\bar{m}}{2} > M, \text{ quindi } \frac{\bar{m}}{2} > M > x$$

(siamo nell'intervallo $[m, M]$), per ogni $m \geq \bar{m}$, $f'_m(x) < 0 \Rightarrow$
 $f_m(x)$ è decrecente su $[m, M]$. Il massimo è quindi

$$\underline{f_m(m) = e^{mM^2 - m^2M}}$$



Quindi:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sup_{x \in [m, M]} |f_m(x)| = C + \sum_{m=\bar{m}}^{+\infty} e^{mM^2 - m^2M} < +\infty, \text{ siccome } m > 0.$$

Quindi c'è convergenza totale, per cui uniforme
di S_m ad S su $[m, M] \quad \forall \quad m, M \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < m < M < +\infty$

C'è convergenza uniforme "in 0"? E a " $+\infty$ "?

Non c'è convergenza totale, ma ciò non preclude che non ci sia convergenza uniforme di S_m a S su $(0, M]$ o su $[m, +\infty)$, o su $(0, +\infty)$.

Consideriamo il caso $(0, M]$;

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^m e^{kx^2 - k^2 x}; \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x}$$

$$S(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x};$$

$$|S(x) - S_m(x)| = \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x}; \quad \text{siamo su } (0, M];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{kx^2 - k^2 x} = 1 \quad \forall k \geq m+1, \text{ quindi } \forall m,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x} = +\infty; \quad \text{quindi } \forall m, \sup_{x \in (0, M]} \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x} \geq$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |S(x) - S_m(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x} = +\infty,$$

in particolare, $\forall m$, $\sup_{x \in (0, M]} \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x} = +\infty$

e quindi $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{x \in (0, M]} |S(x) - S_m(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} "+\infty" = +\infty.$

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2 x}$$

Similmente si prova per il caso $[m, +\infty)$;

$$|S(x) - S_m(x)| = \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2x}$$

$$\sup_{x \in [m, +\infty)} \sum_{k=m+1}^{+\infty} e^{kx^2 - k^2x} = +\infty \quad \forall m, \text{ per cui}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [m, +\infty)} |S(x) - S_m(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} "+\infty" = +\infty.$$

Abbiamo usato la definizione di convergenza uniforme

della successione di funzioni S_m (le somme parziali)

alla funzione S (la somma della serie);

abbiamo scritto $S_m(x) - S(x)$ e notato che è la coda della serie. Abbiamo provato che $\forall m$ il $\sup_x |S_m(x) - S(x)| = +\infty$

sia per $x \in (0, \pi]$ che $x \in [m, +\infty)$. E abbiamo concluso.

□

Es. 5 Si sa che $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha convergenza puntuale
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Discutere la convergenza uniforme.

Dim: caso $[x \geq 0]$.

È anche noto (dis. Bernoulli) che

$$\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall x \geq 0, \forall n$$

Si può provare così: vogliamo mostrare che $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n-1}\right)^{n-1}$,

cioè $\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n-1+x}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)$, cioè

$\left(\frac{n+x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)^n \geq \left(\frac{n-1+x-x}{n-1+x}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n-1+x}\right)^n$; vogliamo mostrare che

$\left(\left(\frac{n+x}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n-1+x}\right)\right)^n \geq \left(1 - \frac{x}{n-1+x}\right)^n$; il membro a sinistra è

$\left(\frac{n^2+nx-n-x}{n^2-n+nx}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n(n-1+x)}\right)^n$; quindi vogliamo mostrare

$\left(1 - \frac{x}{n(n-1+x)}\right)^n \geq \left(1 - \frac{x}{(n-1+x)}\right)$; la dis. di Bernoulli

dice $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall a \geq -1$. Prendiamo con

$a = -\frac{x}{n(n-1+x)}$ (si vede che per $x \geq 0$, questa quantità è ≥ -1).

Concludiamo). / Im generale è un fatto risaputo che
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ converge crescendo a } e^x$$

Se consideriamo ora un qualsiasi $[0, \pi] \subset [0, +\infty)$ (quindi un compatto di $[0, +\infty)$), si ha che

- $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall x \in [0, \pi], \forall n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad \forall x \in [0, \pi]$
- $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, e^x$ sono continue su $[0, \pi]$.

Allora (T. Dini), la convergenza è uniforme su $[0, \pi]$.

La convergenza non è uniforme su $[0, +\infty)$:

Consideriamo

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ su } [0, +\infty);$$

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \left(1 - \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{e^x}\right)$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, poiché il numeratore c'è una potenza, il denominatore, un esponenziale

$$\text{quindi } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = +\infty$$

Per ogni n . Quindi $\sup_{x \in [0, +\infty)} |e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n| \geq +\infty$ ($\forall n$)!
(quindi $= +\infty$),

$$\text{quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, +\infty)} |e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n| = +\infty. \text{ Non c'è}$$

conv. uniforme su tutto $[0, +\infty)$

Queste tecniche non si adattano al caso $x \leq 0$. In questo caso si cerca, per ogni $m \in \mathbb{N}$, di stimare il

$$\sup_{x \in [-1, 0]} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \right| \quad (\text{per la derivata delle differenze})$$

$e^x - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ uguale a 0, vale gli estremi -1 e 0 , etc.,
risulta macchinosa ma fattibile). Oppure si procede così
 (e si risolve anche per $x \geq 0$). Consideriamo un intervallo
 compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (a e b arbitrari, $-\infty < a < b < +\infty$:
 possono essere entrambi positivi, negativi, oppure avere segni
 opposti).

$$\text{Consideriamo } \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^{m \ln\left(1 + \frac{x}{m}\right)} = e$$

Esponiamo $f_m(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{m}\right)$ otteniamo $f_m(0) = 0$:

$$f_m\left(1 + \frac{0}{m}\right) = 0; \quad f'_m(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{m}} \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow f'_m(0) = \frac{1}{m};$$

$$f''_m(x) = -\frac{1}{m^2 \left(1 + \frac{x}{m}\right)^2}; \quad \text{Abbiamo (F. Taylor con resto di Lagrange)}$$

$$f_m(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{m}\right) = 0 + \frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} \cdot \xi, \quad \text{dove } \xi := \left(\frac{1}{1 + \frac{\eta}{m}}\right)^2 \text{ per qualche}$$

$$\eta \in [a, b] \quad \cdot \quad \boxed{\xi \geq 0!}$$

per cui

$$n \left(\frac{x}{n} - \frac{\xi x^2}{2n^2} \right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e \quad ; \text{ quindi}$$

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x - e^{x - \frac{\xi x^2}{2n}} = e^x \left(1 - e^{-\frac{\xi x^2}{2n}} \right) ;$$

Siccome siamo su $[a, b]$, ξ può essere stimato sia dall'alto che dal basso, con un certo valore, che potrà dipendere da a o b , ma non ci interessa per ora: può essere $+\infty$ solo se $\eta = -n$, ma siccome siamo su $[a, b]$ e a noi interessa il $\lim_{n \rightarrow +\infty}$, questo non è un problema. Note: trattiamo ξ come una costante, positiva (è un quadrato) che dipende da a e b eventualmente.

$$\text{Si ha che } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} e^x \left(1 - e^{-\frac{\xi x^2}{2n}} \right) = 0$$

(si può usare il T. di Dini anche più per provare quest'ultima affermazione). Quindi c'è conv. uniforme su $[a, b]$, $\forall a < b$.

Infine, non c'è convergenza uniforme in $(-\infty, M]$:

Per ogni n fissato,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \begin{cases} -\infty, & n \text{ pari} \\ +\infty, & n \text{ dispari} \end{cases}, \text{ quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| = +\infty \quad \forall n \Rightarrow \sup_{x \in (-\infty, M]} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| \geq +\infty$$

($\Downarrow$)
 $= +\infty$

$$\text{e quindi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in (-\infty, M]} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right| = +\infty.$$

□

ES. 8] Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ delle successioni di funzioni

$$f_m(x) = \frac{1+x^m}{m+x^{2m}}$$

Dim.:

partiamo dalla convergenza puntuale:

Si vede che $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1+x^m}{m+x^{2m}} = 0$, infatti:

$$f_m(x) = \frac{1+x^m}{m+x^{2m}} = \underbrace{\frac{1}{m+x^{2m}}}_{\downarrow m \rightarrow +\infty \atop 0} + \frac{x^m}{m+x^{2m}}; \quad \frac{x^m}{m+x^{2m}} \leq \frac{|x^m|}{m+x^{2m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$
$$\forall \frac{|x^m|}{m+x^{2m}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Per cui $f_m(x) \rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (conv. puntuale).

• possiamo ad esaminare la convergenza uniforme;

cerchiamo di individuare il

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1+x^m}{m+x^{2m}} \right|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1+x^m}{m+x^{2m}} = 0 \quad \forall m$$

~~$$\frac{1+x^m}{m+x^{2m}} = \frac{1}{m} \frac{1+x^m}{1+x^{2m}}$$~~

$$\left| \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \right| \leq \frac{1}{n+\underbrace{x^{2n}}_{\geq 0}} + \frac{|x^n|}{n+x^{2n}} \leq \frac{1}{n} + \frac{|x|^n}{n+x^{2n}};$$

19

non ci resta che stimare la quantità $\frac{|x|^n}{n+x^{2n}}$ in maniera

opportuna; possiamo farlo per $x \geq 0$, la funzione in esame è
simmetrica rispetto all'asse delle y ;

$$f(x) = \frac{x^n}{n+x^{2n}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

$$f'_n(x) = \frac{n x^{n-1} (n - x^{2n})}{(n + x^{2n})^2} = 0 \Leftrightarrow x^{2n} = n, \text{ cioè } x^n = \sqrt{n};$$

questo è sicuramente il massimo (è l'unico punto critico,
e $f_n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0 \pm \infty$); quindi $f_n(x) \leq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}};$
per cui

$$\left| \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall n: \text{ abbiamo trovato una stima}$$

per ogni f_n tramite una funzione che non dipende da x

(questo è quello che si deve cercare di fare sempre in questi
tipi di esercizi!). In questo modo possiamo immediatamente

Scrivere:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}, \text{ e quindi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1+x^n}{n+x^{2n}} \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0. \text{ Quindi } f_n \rightarrow f$$

uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

□

Es. 10 | Sia $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni $f_m(x) = \frac{1}{m} \ln(1 + e^{mx})$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) conv. puntuale e uniforme di $f_m(x)$
ii) " " " di $f'_m(x)$.

Dim:

- i) Calcoliamo il limite puntuale: se $x \leq 0$, allora $e^{mx} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow +\infty$, se $x \geq 0$, $e^{mx} \equiv 1$; mentre $\frac{1}{m} \rightarrow 0$, per cui in definitiva, per $x \leq 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0$; se poi $x > 0$, $e^{mx} \rightarrow +\infty$, quindi $\ln(1 + e^{mx}) \rightarrow +\infty$, e $\frac{1}{m} \rightarrow 0$; non si vede subito qual è il limite per $m \rightarrow +\infty$.

$$\frac{1}{m} \ln(1 + e^{mx}) = x \cdot \frac{\ln(1 + e^{mx})}{mx}; \text{ ora } \frac{\ln(1 + e^{mx})}{mx} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty};$$

usiamo de l'Hôpital (la variabile è "m") : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{mx})}{mx} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x e^{mx}}{1 + e^{mx}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{mx}}{1 + e^{mx}} = 1$; per cui

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \ln(1 + e^{mx}) = x \quad \text{se } x > 0.$$

$$f_m(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}; \text{ resta a vedere la conv. puntuale.}$$

$$(f(x) \text{ è continua : } \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = 0)$$

poniamo a quella uniforme.

Consideriamo gli insiemi $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$;

$f_n \rightarrow 0$ puntualmente su $(-\infty, 0]$ (0 compreso)

$f_n \rightarrow x$ " " $[0, +\infty)$ (0 compreso: $f(x) = x$ vale 0 in 0).

• $x \in (-\infty, 0]$; consideriamo il $\sup_{x \in (-\infty, 0]} |f_n(x) - f(x)|$.

cioè $\sup_{x \in (-\infty, 0]} |f_n(x)|$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx}) > 0$, non c'è bisogno del modulo.

su $(-\infty, 0]$, $e^{nx} < 1$, quindi $\ln(1 + e^{nx}) < \ln(1 + 1) = \ln(2)$,

quindi $f_n(x) < \frac{\ln(2)}{n} \quad \forall x, \forall n$, per cui

$\sup_{x \in (-\infty, 0]} f_n(x) < \frac{\ln(2)}{n} \quad \forall n \Rightarrow$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in (-\infty, 0]} f_n(x) = 0$; c'è conv. uniforme su $(-\infty, 0]$.

• $x \in [0, +\infty)$; consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$\sup_{x \in [0, +\infty)} |x - \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})|$; consideriamo su $[0, +\infty)$ la

funzione $g_n(x) = x - \frac{1}{n} \ln(1 + e^{nx})$; si vede

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) = 0 - \frac{\ln(2)}{n}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{x \cdot \ln(1 + e^{nx})}{nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(1 + e^{nx})}{nx} \right) = 0$

Si può vedere al es. con un'espansione di $\ln(1+e^{mx})$ in serie al 1° ordine).

Consideriamo $g'_m(x) = 1 - 1 + \frac{1}{1+e^{mx}} = \frac{1}{1+e^{mx}} > 0$

Quindi $g_m(x)$ è crescente, $g_m(0) = -\frac{\ln(2)}{m}$, $g_m(+\infty) = 0$, per cui

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |g_m(x)| = \frac{\ln(2)}{m}, \text{ e quindi}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, +\infty)} |g_m(x)| = 0. \text{ Si ha convergenza uniforme su } [0, +\infty).$$

Se come abbiamo cons. uniforme su $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$

abbiamo ricavato che $f_m \rightarrow f$ uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

i) Consideriamo $f'_m(x) = \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}};$

• $x > 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = 1$

• $x = 0$, $f'_m(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

• $x < 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = 0$

per cui $\lim_{m \rightarrow +\infty} f'_m(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Questa è la convergenza puntuale. Non c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$: se così fosse la funzione limite $g(x)$ sarebbe continua. Ma essa è discontinua in $x=0$.

Potrebbe essere convergente uniforme su $(-\infty, \delta]$ e su $[\delta, +\infty)$, $\forall \delta > 0$.

||

Iniziamo da $(-\infty, -\delta]$; qui $g(x) \equiv 0$;

$$|f'_m(x) - g(x)| = \left| \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} - 0 \right| = \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = 0 \quad \forall m;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\delta^-} \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = \frac{e^{-m\delta}}{1+e^{-m\delta}} \quad \forall m; \text{ Calcoliamo la derivata prima:}$$

$$\left(\frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} \right)' = \frac{m e^{mx}}{(1+e^{mx})^2} > 0 \quad \forall x, \forall m; \text{ quindi su } (-\infty, -\delta] \text{ la}$$

$$\text{funzione \u00e9 crescente, per cui } \sup_{x \in (-\infty, -\delta]} \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = \frac{e^{-m\delta}}{1+e^{-m\delta}}$$

$$\text{Quindi } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{x \in (-\infty, -\delta]} |f'_m(x) - g(x)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{-m\delta}}{1+e^{-m\delta}} = 0,$$

per cui c' \u00e9 convergenza uniforme su $(-\infty, -\delta]$;

• Passiamo a $[\delta, +\infty)$; Qui $g(x) \equiv 1$;

$$|f'_m(x) - g(x)| = \left| \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} - 1 \right| = 1 - \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = 0 \quad \forall m$$

$$\lim_{x \rightarrow \delta^+} 1 - \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}} = 1 - \frac{e^{m\delta}}{1+e^{m\delta}} \quad \forall m;$$

$$\left(1 - \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}}\right)' = -\frac{me^{mx}}{(1+e^{mx})^2} < 0; \text{ la funzione è decrescente}$$

$$\text{su } [\delta, +\infty), \text{ per cui } \sup_{x \in [\delta, +\infty)} \left(1 - \frac{e^{mx}}{1+e^{mx}}\right) = 1 - \frac{e^{m\delta}}{1+e^{m\delta}} \neq 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [\delta, +\infty)} |f_n(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^{n\delta}}{1+e^{n\delta}}\right) = 0;$$

Quindi e è convergente uniforme su $[\delta, +\infty)$.

□